В зависимости от значений параметра k решить уравнение

$$\frac{\lg(kx)}{\lg(x+1)} = 2 \tag{1}$$

О.Д.З.:

$$\begin{cases} kx > 0, \\ x+1 > 0, \\ x+1 \neq 1. \end{cases}$$

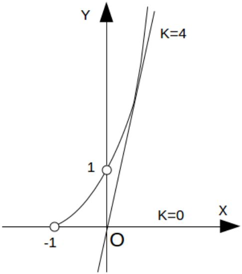
Тогда исходное уравнение равносильно следующему:

$$\lg(kx) = 2\lg(x+1) \Leftrightarrow kx = (x+1)^2$$

Определим количество решений квадратного уравнения:

$$x^2 + (2-k)x + 1 = 0$$

$$\begin{aligned} D &= k^2 - 4k \\ D < 0 \quad &\Leftrightarrow \quad k \in (0;4) \\ D = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad k = 0, k = 4 \\ D > 0 \quad &\Leftrightarrow \quad k \in (-\infty;0) \cup (4;+\infty) \end{aligned}$$



1. $k < 0 \Rightarrow x = \frac{k-2+\sqrt{k^2-4k}}{2}$
2. $0 \leq k < 4 \Rightarrow x \in \varnothing$
3. $k = 4 \Rightarrow x = 1$
4. $k > 4 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{k-2\pm\sqrt{k^2-4k}}{2}$.

При каких значениях параметра a сумма квадратов корней уравнения

$$2\log_4(2x^2 - x + 2a - 4a^2) + \log_{0.5}(x^2 + ax - 2a^2) = 0 \qquad (2)$$

больше 1?
Перейдём к равносильной системе

$$\begin{cases} x^2 - (a+1)x + 2a(1-a) = 0, \\ (x+2a)(x-a) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2a,\ x_2 = 1-a, \\ (x+2a)(x-a) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 4a^2 > 0, \\ (a+1)(2a-1) < 0. \end{cases} \Leftrightarrow a \in (-1;0) \cup (0;1/2)$$

Рассмотрим $x_1^2 + x_2^2 = 5a^2 - 2a + 1 > 1 \ \Rightarrow a \in (-\infty;0) \cup (\frac{2}{5};\infty)$
Ответ: $a \in (-1;0) \cup (\frac{2}{5};\frac{1}{2})$.

Какие значения x из интервала $(\frac{1}{2}; \frac{5}{2})$ являются решениями неравенства

$$\log_{3x-x^2}(3a - ax) < 1 \tag{3}$$

при любом значении парметра a из интервала $(0; 2)$?

Для $x \in (\frac{1}{2}; \frac{5}{2})$ основание логарифма $3x - x^2 > 1$.
Перейдём к равносильной системе

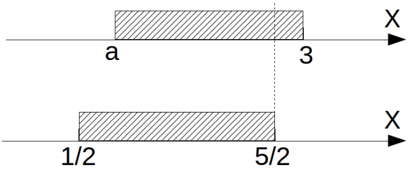
$$\left\{ \begin{array}{c} 3a - ax < 3x - x^2, \\ 3a - ax > 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x^2 - (a+3)x + 3a < 0, \\ 3a - ax > 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{c} (x-3)(x-a) < 0, \\ (3-x)a > 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} (x-3)(x-a) < 0, \\ (x-3)a < 0. \end{array} \right.$$

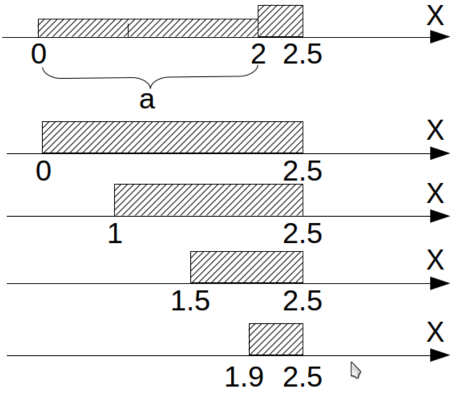
Исходя из условия $x \in (\frac{1}{2}; \frac{5}{2}) \;\Rightarrow\; x - 3 < 0$, тогда

$$\left\{ \begin{array}{c} x - 3 < 0 \\ x - a > 0 \\ a > 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow 0 < a < x < 3.$$

По условию $x \in (\frac{1}{2}; \frac{5}{2})$ и $a \in (0; 2)$.
Решая уравнение, получили $x \in (a; 3)$.
Вопрос:
Какие значения $x \in (\frac{1}{2}; \frac{5}{2})$ являются решениями неравенства при любом значении парметра $a \in (0; 2)$?



Тогда $x \in (a; \frac{5}{2})$.



Ответ: $2 \leq x < \frac{5}{2}$

При каких значениях парметра a каждое решение неравенства

$$0.4^{x^2+1} \geq 6.25^{a-3x} \tag{4}$$

является решением неравенства

$$x^2 - 6x + 4 < a^2 \tag{5}$$

Преобразуем неравенство (4):

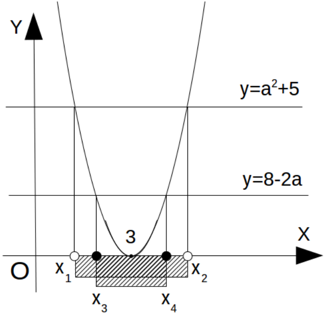
$$\begin{aligned} \left(\frac{2}{5}\right)^{x^2+1} &\geq \left(\frac{5}{2}\right)^{2(a-3x)} \\ \left(\frac{2}{5}\right)^{x^2+1} &\geq \left(\frac{2}{5}\right)^{-2(a-3x)} \\ x^2+1 &\leq -2(a-3x) \\ (x-3)^2+2a-8 &\leq 0 \end{aligned}$$

Преобразуем неравенство (5):

$$\begin{aligned} x^2 - 6x + 4 &< a^2 \\ x^2 - 6x + 4 - a^2 &< 0 \\ (x-3)^2 - a^2 - 5 &< 0 \end{aligned}$$

Тогда задачу можно сформулировать следующим образом:

при каких значениях парметра a каждое решение неравенства $(x-3)^2 \le 8 - 2a$ является решением неравенства $(x-3)^2 < a^2 + 5$, т. е. множество решений первого неравенства включается во множество решений второго неравенства?



$$\begin{cases} 8-2a < a^2+5 \\ 8-2a \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+2a-3>0 \\ a \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \in (-\infty,-3) \cup (1,\infty) \\ a \in (-\infty, 4] \end{cases}$$

Ответ: $a \in (-\infty,-3) \cup (1,4]$

При каких значениях парметра a неравенство

$$\log_{a(a+1)}(|\ x\ | + 4) > 1 \qquad (6)$$

выполняется для любого значения x?

О.Д.З.: $a(a+1) > 0,\ a(a+1) \neq 1,\ |\ x\ | + 4 \geq 4$

Определим при каких значениях параметра a неравенство выполнятся для $x = 0$, когда $|\ x\ | + 4$ принимает наименьшее значение.

I. $0 < a(a+1) < 1$

$a \in (\frac{-1-\sqrt{5}}{2}; -1) \cup (0; \frac{-1+\sqrt{5}}{2})$

$$\log_{a(a+1)} 4 > 1$$

$$a(a+1) > 4$$

$$a^2 + a - 4 > 0$$

$a \in (-\infty; \frac{-1-\sqrt{17}}{2}) \cup (\frac{-1+\sqrt{17}}{2}; +\infty)$

Ответ: $a \in \varnothing$

II. $a(a+1) > 1$

$a \in (-\infty; \frac{-1-\sqrt{5}}{2}) \cup (\frac{-1+\sqrt{5}}{2}; +\infty)$

$$\log_{a(a+1)} 4 > 1$$

$$a(a+1) < 4$$

$$a^2 + a - 4 < 0$$

$a \in (\frac{-1-\sqrt{17}}{2};\ \frac{-1+\sqrt{17}}{2})$

Ответ:$a \in (\frac{-1-\sqrt{17}}{2}; \frac{-1-\sqrt{5}}{2}) \cup (\frac{-1+\sqrt{5}}{2};\ \frac{-1+\sqrt{17}}{2})$

Если рассмотрим неравенство при $\mid x \mid > 0$, то

в случае I:

свободный член увеличится и увеличится дискриминант,
а значит увеличатся по абсолютной величине значения
$a_1 = \frac{-1-\sqrt{17+4|x|}}{2}$; $a_2 = \frac{-1+\sqrt{17+4|x|}}{2}$,
и в пересечении всегда будем получать $a \in \varnothing$.

в случае II:

$a(a+1) < \mid x \mid +4$ и в пересечении получим
$a \in (\frac{-1-\sqrt{17+4|x|}}{2}; \frac{-1-\sqrt{5}}{2}) \cup (\frac{-1+\sqrt{5}}{2}; \ \frac{-1+\sqrt{17+4|x|}}{2})$.
Тогда неравенство будет выполнено для любых значений x на том наименьшем промежутке, который получается в пересечении, т. е.
$a \in (\frac{-1-\sqrt{17}}{2}; \frac{-1-\sqrt{5}}{2}) \cup (\frac{-1+\sqrt{5}}{2}; \ \frac{-1+\sqrt{17}}{2})$

Ответ: $a \in (\frac{-1-\sqrt{17}}{2}; \frac{-1-\sqrt{5}}{2}) \cup (\frac{-1+\sqrt{5}}{2}; \ \frac{-1+\sqrt{17}}{2})$

При каких значениях парметра a неравенство

$$\log_{a^2-2}((a^2-1)x^2+2x+2)>1 \tag{7}$$

выполняется для любого значения x?

О.Д.З.: $a^2-2>0,\ a^2-2\neq 1$
Рассмотрим

$$(a^2-1)x^2+2x+2>0$$

и выясним при каких значениях x выражение будет принимать положительные значения.
$a^2-2>0 \Rightarrow\ a^2-1>1 \Rightarrow$ у параболы $y=(a^2-1)x^2+2x+2$ ветви направлены вверх.
$D=4(3-2a^2)<0$ для всех a из О.Д.З. $\Rightarrow\ x\in R$

Решим неравенство для $x = -1$

$$\text{I. } 0 < a^2 - 2 < 1 \qquad \text{II. } a^2 - 2 > 1$$

$$\log_{a^2-2} a^2 - 1 > 1 \qquad \log_{a^2-2} a^2 - 1 > 1$$

$$a^2 - 1 < a^2 - 2 \qquad a^2 - 1 < a^2 - 2$$

$$a \in \varnothing \qquad a \in R$$

$$a \in (-\infty; \sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}; \infty)$$

Решим неравенство для $\forall x \in R$, учитывая, что $a^2 > 3$, т. е. $a^2 - 2 > 1$:

$$\log_{a^2-2}((a^2-1)x^2 + 2x + 2) > 1$$

$$(a^2-1)x^2 + 2x + 2 > a^2 - 2$$

$$(a^2-1)x^2 + 2x + 4 - a^2 > 0$$

Полученное квадратное неравенство должно выполняться $\forall x \in R$, а значит $D = 4(a^4 - 5a + 5) < 0 \;\Leftrightarrow\; a^2 \in (3; \frac{5+\sqrt{5}}{2})$

Ответ: $\sqrt{3} < | a | < \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}$

При каких значениях парметра a имеет решения неравенство

$$\log_{a+x}((a-x)x) < \log_{a+x} x? \tag{8}$$

$$\begin{cases} a+x>0, \\ a+x\neq 1, \\ (a-x)x>0, \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+x>0, \\ a+x\neq 1, \\ a-x>0, \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0, \\ -a<x<a, \\ a+x\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a>0, \\ 0<x<a, \\ x\neq 1-a \end{cases}$$

I. $\begin{cases} 0<a+x<1, \\ \log_{a+x}(a-x)<0 \end{cases}$

$$\begin{cases} 0<a+x<1, \\ a-x>1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x<1-a, \\ x<a-1 \end{cases}$$

$$a \in \varnothing$$

II. $\begin{cases} a+x>1, \\ \log_{a+x}(a-x)<0 \end{cases}$

$$\begin{cases} a+x>1, \\ a-x<1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x>1-a, \\ x>a-1 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{r} 0<a<1 \Rightarrow \ 1-a<x<a, \\ a\geq 1 \Rightarrow \ a-1<x<a \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{r} 0<a<1 \Rightarrow \ a>1/2, \\ a\geq 1 \Rightarrow \ a\in R \end{array} \right. \Rightarrow \left[\begin{array}{r} 1/2<a<1 \\ a\geq 1 \end{array} \right.$$

Ответ: $a>\frac{1}{2}$

При каких значениях парметра a неравенство

$$\log_{\frac{a}{a+1}}(x^2 + a) > 1 \tag{9}$$

выполняется для любого значения x? Ответ: $a < -2$

В зависимости от значений параметра a решить неравенство

$$\log_{\sqrt{2a}}(a+2x-x^2)<2. \tag{10}$$

Ответ: если $a\le 0$ и $a=\frac{1}{2}$, то решений нет
если $0<a<\frac{1}{2}$, то $x_1<x<x_2$
если $\frac{1}{2}<a\le 1$, то $x_3<x<x_1$, $x_2<x<x_4$
если $a>1$, то $x_3<x<x_4$,
где $x_{1,2}=1\pm\sqrt{1-a}, x_{3,4}=1\pm\sqrt{1+a}$

В зависимости от значений параметра a решить неравенство

$$2\log_4(x-a+1)+\log_{\frac{1}{2}}(x-2a-3)\geq 2. \tag{11}$$

Ответ: если $a\leq -4$, то решений нет
если $a>-4$, то $2a+3<x\leq \frac{7a+13}{3}$

В зависимости от значений параметра a решить уравнение

$$\sin^6 x + \cos^6 x = a \sin 4x \tag{12}$$

После преобразования получим уравнение:

$$\begin{aligned} 8a \sin 4x - 3\cos 4x &= 5 \\ \sin(4x - \varphi) &= \frac{5}{R},\ R = \sqrt{64a^2 + 9} \\ \frac{5}{R} &\leq 1 \Leftrightarrow |\, a \,| \geq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$x = \frac{(-1)^n}{4} \arcsin \frac{5}{R} + \frac{\pi n}{4} + \frac{\varphi}{4}$$

Ответ: если $|\, a \,| < \frac{1}{2}$, то $x \in \varnothing$
если $|\, a \,| \geq \frac{1}{2}$, то $x = \frac{(-1)^n}{4} \arcsin \frac{5}{R} + \frac{\pi n}{4} + \frac{\varphi}{4},\ n \in Z$

При каких значениях параметра $a \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ имеет решения уравнение

$$\sqrt{2\sin(x-a)+\sqrt{3}} = \cos 6x - 1 \tag{13}$$

Так как $\sqrt{2\sin(x-a)+\sqrt{3}} \geq 0$ и $\cos 6x - 1 \leq 0$, то уравнение равносильно системе

$$\left\{ \begin{array}{c} \cos 6x = 1 \\ 2\sin(x-a) = -\sqrt{3} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x = \frac{\pi n}{3} \\ x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{3} + \pi k + a \end{array} \right.$$

$a = \frac{\pi n}{3} + (-1)^k \frac{\pi}{3} - \pi k$
$-\frac{\pi}{2} < a < \frac{\pi}{2}$
Ответ: $a = -\frac{\pi}{3}; 0; \frac{\pi}{3}$.

В зависимости от значений параметра a решить уравнение

$$\sin^4 x - \cos^4 x = a(\operatorname{tg}^4 x - \operatorname{ctg}^4 x) \tag{14}$$

на интервале $x \in (0; \frac{\pi}{2})$.

После преобразования получим равносильную систему уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} \sin^4 x - \cos^4 x = 0 \\ \sin^4 x \cos^4 x - a(\sin^4 x + \cos^4 x) = 0 \end{array} \right.$$

Уравнение $\sin^4 x - \cos^4 x = 0 \Leftrightarrow\ \sin^2 x - \cos^2 x = 0 \Leftrightarrow\ x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2} \Rightarrow$ $x = \frac{\pi}{4} \in (0; \frac{\pi}{2})$

Уравнение
$\sin^4 x \cos^4 x - a(\sin^4 x + \cos^4 x) = 0 \Leftrightarrow\ \sin^4 2x + 8a \sin^2 2x - 16a = 0.$
Оно имеет решения, если $D = 64(a^2 + a) \geq 0 \Leftrightarrow\ a \leq -1,\ a \geq 0$, тогда

$$\left[\begin{array}{l} \sin^2 2x = 4(\sqrt{a^2+a} - a) \\ \sin^2 2x = -4(\sqrt{a^2+a} + a) \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < 4(\sqrt{a^2+a} - a) < 1 \\ 0 < -4(\sqrt{a^2+a} + a) < 1 \end{array} \right.$$

Пусть $a \geq 0$, тогда $0 < 4(\sqrt{a^2 + a} - a) < 1 \Rightarrow$
$0 < a < \frac{1}{8} \Rightarrow$ уравнение имеет два решения на $(0; \frac{\pi}{2})$
$a = \frac{1}{8} \Rightarrow$ уравнение имеет одно решение на $(0; \frac{\pi}{2})$
$a > \frac{1}{8} \Rightarrow$ уравнение не имеет решений на $(0; \frac{\pi}{2})$

Пусть $a \leq 1$, тогда корни отрицательны и уравнение решений не имеет.

Ответ: если $a \leq 0,\ a \geq \frac{1}{8}$, то одно решение,
если $0 < a < \frac{1}{8}$, то три решения.